

# Planche n° 28. Espaces vectoriels

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice n° 1 : (\*T)

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni des opérations usuelles. Soit  $F$  l'ensemble des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'une des conditions suivantes :

- 1)  $f(0) + f(1) = 0$       2)  $f(0) = 0$       3)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$       4)  $\forall x \in [0, 1], f(x) + f(1-x) = 0$   
5)  $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq 0$       6)  $2f(0) = f(1) + 3$

Dans quel cas  $F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

## Exercice n° 2 : (\*\*T)

On munit  $\mathbb{R}^n$  des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- 1)  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$       2)  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 1\}$   
3)  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2\}$       4)  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$   
5)  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \times x_2 = 0\}$

## Exercice n° 3 : (\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$  vérifiant  $A \cap B = A \cap C$ ,  $A + B = A + C$  et  $B \subset C$ . Montrer que  $B = C$ .

## Exercice n° 4 : (\*\*T)

Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de  $E$  suivants :  $u = (\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $v = (\cos(n\theta + a))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $w = (\cos(n\theta + b))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\theta$ ,  $a$  et  $b$  sont des réels donnés. Montrer que  $(u, v, w)$  est une famille liée.

## Exercice n° 5 : (\*\*T)

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $u = (1, 2, -5, 3)$  et  $v = (2, -1, 4, 7)$ . Déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  réels tels que  $(\lambda, \mu, -37, -3)$  appartienne à  $F$ .

## Exercice n° 6 : (\*\*T)

Montrer que  $a = (1, 2, 3)$  et  $b = (2, -1, 1)$  engendrent le même sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  que  $c = (1, 0, 1)$  et  $d = (0, 1, 1)$ .

## Exercice n° 7 : (\*\*T)

1) Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $f((1, 0, 0)) = (1, 1)$  puis  $f((0, 1, 0)) = (0, 1)$  et  $f((0, 0, 1)) = (-1, 1)$ . Calculer  $f((3, -1, 4))$  et  $f((x, y, z))$  en général.

2) Déterminer  $\text{Ker} f$ . En fournir une base. Déterminer  $\text{Im} f$ .

## Exercice n° 8 : (\*\*I)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ .

1) Montrer que  $[\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}]$  et  $[\text{Im} f = \text{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \text{Ker} f + \text{Im} f]$  (où  $f^2 = f \circ f$ ).

2) Par définition, un endomorphisme  $p$  de  $E$  est un projecteur si et seulement si  $p^2 = p$ . Montrer que

$$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow \text{Id} - p \text{ projecteur}]$$

puis que

$$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \text{Im} p = \text{Ker}(\text{Id} - p) \text{ et } \text{Ker} p = \text{Im}(\text{Id} - p) \text{ et } E = \text{Ker} p \oplus \text{Im} p].$$

3) Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs, montrer que :  $[\text{Ker} p = \text{Ker} q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$ .

4)  $p$  et  $q$  étant deux projecteurs vérifiant  $p \circ q + q \circ p = 0$ , montrer que  $p \circ q = q \circ p = 0$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $p + q$  soit un projecteur lorsque  $p$  et  $q$  le sont. Dans ce cas, déterminer  $\text{Im}(p + q)$  et  $\text{Ker}(p + q)$  en fonction de  $\text{Ker} p$ ,  $\text{Ker} q$ ,  $\text{Im} p$  et  $\text{Im} q$ .

**Exercice n° 9 : (\*\*)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-espaces de  $E$ .

- 1) Montrer que :  $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$ .
- 2) A-t-on toujours l'égalité ?
- 3) Montrer que :  $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + (A \cap C))$ .

**Exercice n° 10 : (\*\*T)**

Dans  $E = \mathbb{R}^4$ , on considère  $V = \{(x, y, z, t) \in E / x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$  et  $W = \{(x, y, z, t) \in E / x + z = y + t\}$ .

- 1) Montrer que  $V$  et  $W$  sont des sous espaces vectoriels de  $E$ .
- 2) Donner une base de  $V$ , une base de  $W$  et une base de  $V \cap W$ .
- 3) Montrer que  $E = V + W$ .

**Exercice n° 11 : (\*\*\*)**

Soit  $C$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , croissantes sur  $\mathbb{R}$ .

- 1)  $C$  est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
- 2) Montrer que  $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g, h) \in C^2 \text{ tel que } f = g - h\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice n° 12 : (\*\*)**

Montrer que la commutativité de la loi  $+$  est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

**Exercice n° 13 : (\*\*\*)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

**Exercice n° 14 : (\*\*IT)**

Soient  $F = \{(\lambda, \lambda, \dots, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$  puis  $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  et que  $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ .

**Exercice n° 15 : (\*\*\*\*)**

- 1) Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que si  $n$  n'est pas un carré parfait alors  $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ .
- 2) Soit  $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$ . Vérifier que  $E$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel puis déterminer une base de  $E$ .

**Exercice n° 16 : (\*\*\*T)**

Dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , étudier la liberté des familles suivantes  $A$  de vecteurs de  $E$  :

- 1)  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant trois réels deux à deux distincts donnés,  $A = (f_a, f_b, f_c)$  où, pour tout réel  $x$ ,  $f_u(x) = \sin(x + u)$ .
- 2)  $A = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où, pour tout réel  $x$ ,  $f_n(x) = nx + n^2 + 1$ .
- 3)  $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  (ici  $E = ]0; +\infty[)^2$ ).
- 4)  $A = (x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$ .

**Exercice n° 17 : (\*\*\*\*)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ .

- 1) Montrer que  $[\text{Kerv} \subset \text{Ker}u \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E) / u = w \circ v]$ .
- 2) En déduire que  $[v \text{ injectif} \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E) / w \circ v = \text{Id}_E]$ .

**Exercice n° 18 : (\*\*\*)**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

- 1) Soit  $f : E \rightarrow E$ .  $f$  est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de  $\text{Ker}f$ .  

$$P \mapsto P'$$
- 2) Mêmes questions avec  $g : E \rightarrow E$ .  

$$P \mapsto \int_0^x P(t) dt$$

**Exercice n° 19 : (\*\*IT)**

1) Soit  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes tels que  $a \neq 0$ .

a) Soit  $F$  l'ensemble des suites  $u$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à un élément  $u$  de  $E$  associe l'élément  $\varphi(u)$  de  $E$  défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\varphi(u))_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

En utilisant l'application  $\varphi$ , retrouver le fait que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2) Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes tels que  $a \neq 0$ .

a) Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant :  $\forall x \in I, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à un élément  $f$  de  $E$  associe l'élément de  $E$  défini par

$$\forall x \in I, (\varphi(f))(x) = af''(x) + bf'(x) + cf(x).$$

En utilisant l'application  $\varphi$ , retrouver le fait que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice n° 20 : (\*\*IT)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

1)  $C_E F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

2) a) Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

b) Quel est l'espace vectoriel engendré par  $F \cup G$  ?

**Exercice n° 21 : (\*IT)**

Soient  $E$  un espace vectoriel puis  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} g.$$

**Exercice n° 22 : (\*)**

Soient  $E$  un espace vectoriel puis  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker} g)$ .

**Exercice n° 23 : (\*\*I)**

Soit  $z$  un nombre complexe non réel. Montrer que  $(1, z)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

**Exercice n° 24 : (\*\*\*)**

Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_a(x) = e^{ax}$ . Montrer que la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est libre.

**Exercice n° 25 : (\*\*I)**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que

$$\varphi \times \psi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

**Exercice n° 26 : (\*\*IT)**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la famille  $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .